

Les billards mathématiques

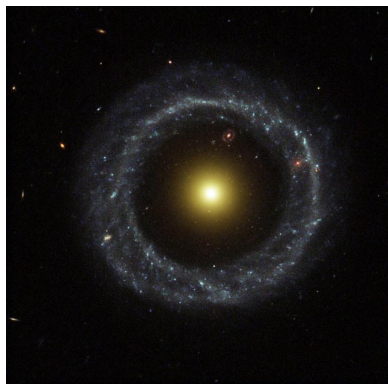
Xavier Buff

Institut de Mathématiques de Toulouse

- Pour préparer cet exposé, je me suis inspiré de conférences d'Etienne Ghys.

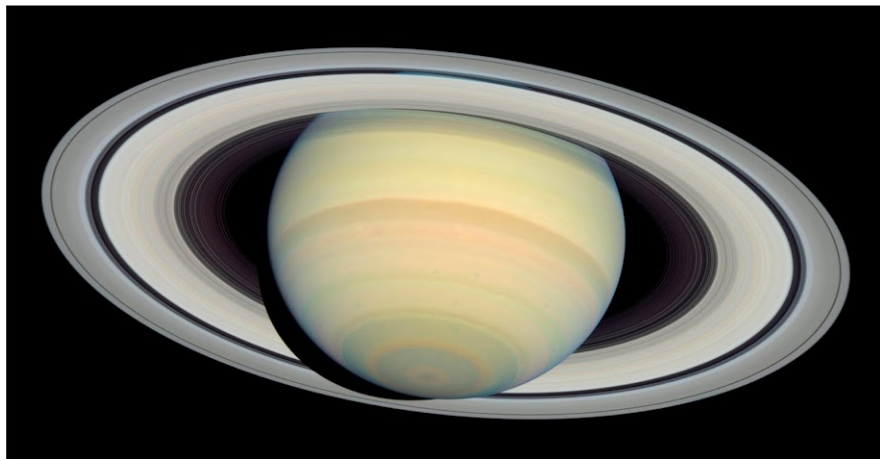
- Pour préparer cet exposé, je me suis inspiré de conférences d'Etienne Ghys.
- Les animations que je vais présenter ont été réalisées par Arnaud Chéritat.

Peut-on expliquer la forme des galaxies ?



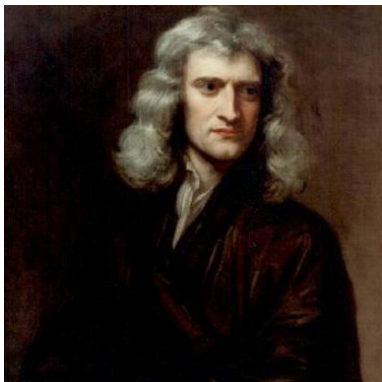
Hubble : <http://hubblesite.org>

Pourquoi voit-on des anneaux autour de Saturne ?



Hubble : <http://hubblesite.org>

Isaac Newton (1643-1727)



- 1666 : invention du calcul différentiel.
- $\sum \vec{F} = m\vec{a}$.

Prédire les trajectoires



Prédire les trajectoires

Ce que fournit le physicien :

- $v(t) = (x'(t), y'(t))$
- $a(t) = v'(t) = (0, -g)$.

Prédire les trajectoires

Ce que fournit le physicien :

- $v(t) = (x'(t), y'(t))$
- $a(t) = v'(t) = (0, -g)$.

Ce qu'en déduit le mathématicien :

- $x(t) = x_0 + v_0 \cos(\alpha)t$
- $y(t) = y_0 + v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$.

Donc

- $y = y_0 + A \cdot (x - x_0) - B \cdot (x - x_0)^2$ avec

$$A = \tan(\alpha) \quad \text{et} \quad B = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}.$$

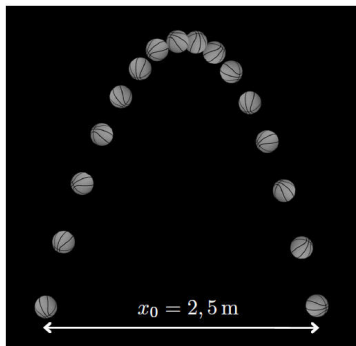
La trajectoire est . . .



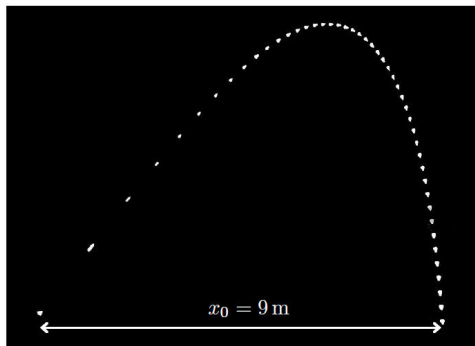
une parabole.



Enfin, presque . . .



Basket



Badminton

Henri Poincaré (1854-1912)

- Le système solaire est-il stable?

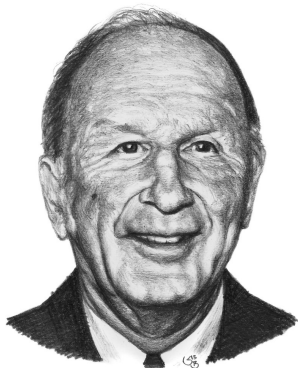


- En 1890, Henri Poincaré étudie le problème des 3 corps.
- C'est la naissance de la théorie du chaos.

Le problème des 3 corps



- Est-il possible de déterminer la trajectoire de 3 corps qui s'attirent mutuellement ?
- Poincaré a montré que les trajectoires sont très sensibles aux petites perturbations.

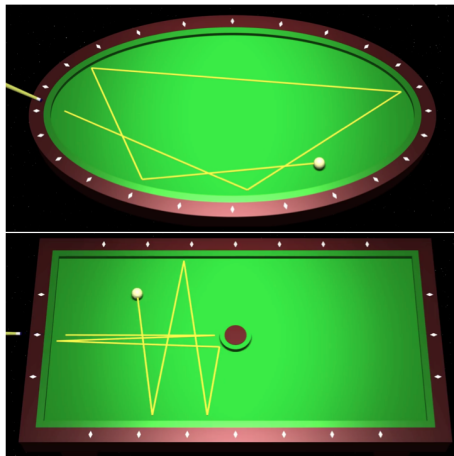
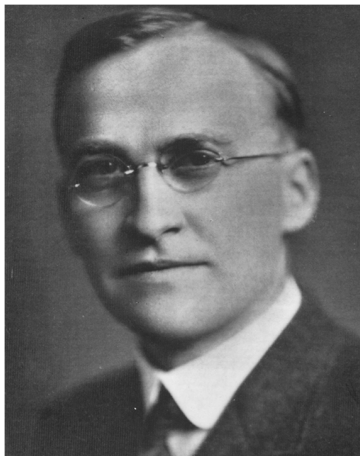


En 1972, Edward Lorenz, météorologue, physicien, mathématicien, informaticien, donne une conférence :
« Predictability : does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas ? »

L'effet papillon



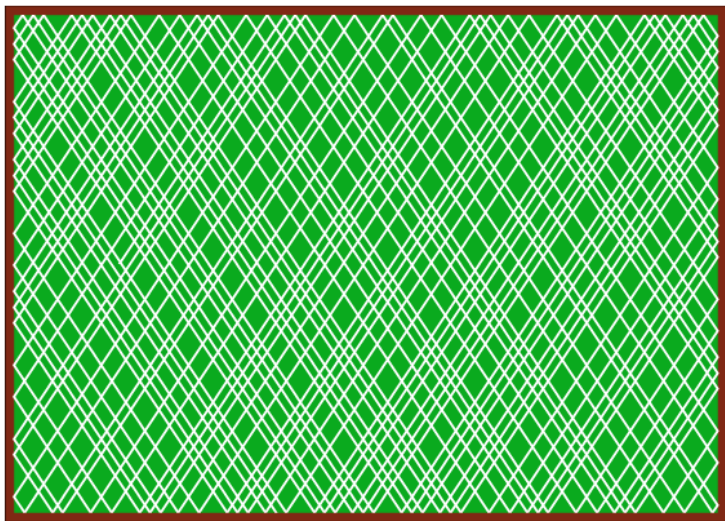
George Birkhoff (1884-1944)



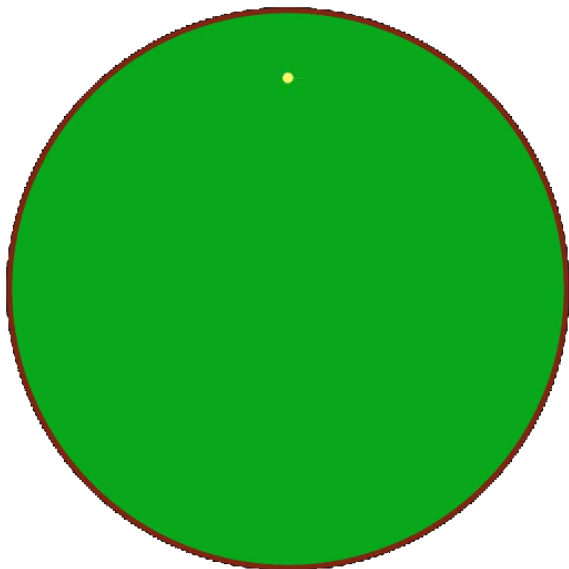
Bien avant, en 1927, George Birkhoff a l'idée d'étudier des billards mathématiques pour illustrer les résultats de Henri Poincaré sur le problème des trois corps.

Billard rectangulaire

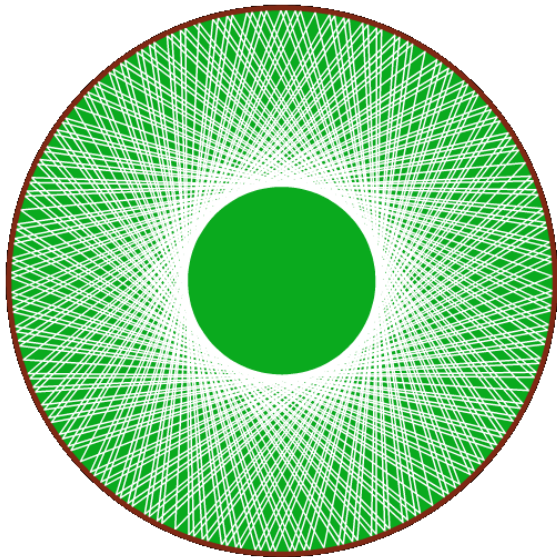
Billard rectangulaire



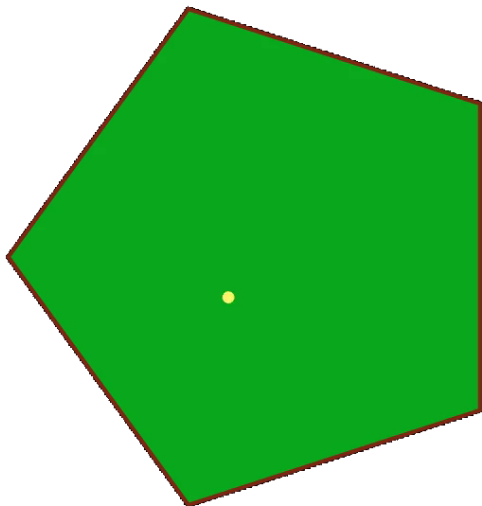
Billard circulaire



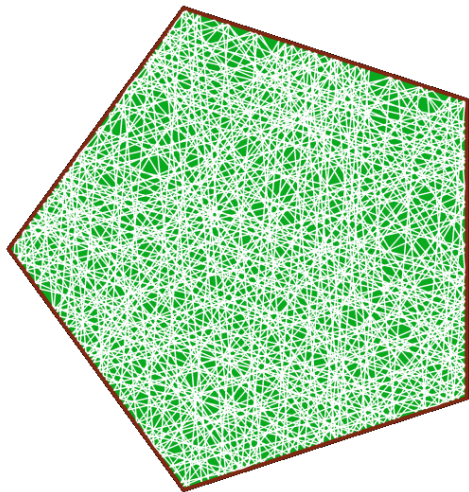
Billard circulaire



Billard pentagonal



Billard pentagonal



Phase Diagram Move New Vertex New Edge Delete Simulate

Build

Circle Stadium Lemon Regular N-Gon N-

Random Triangle

Control Panel

Object	Active Vertex
X: 375	X: 275
Y: 244	Y: 181
Angle: 1.9165546169513	Arc: 180.0

Coarse Adjust

Medium Adjust

Fine Adjust

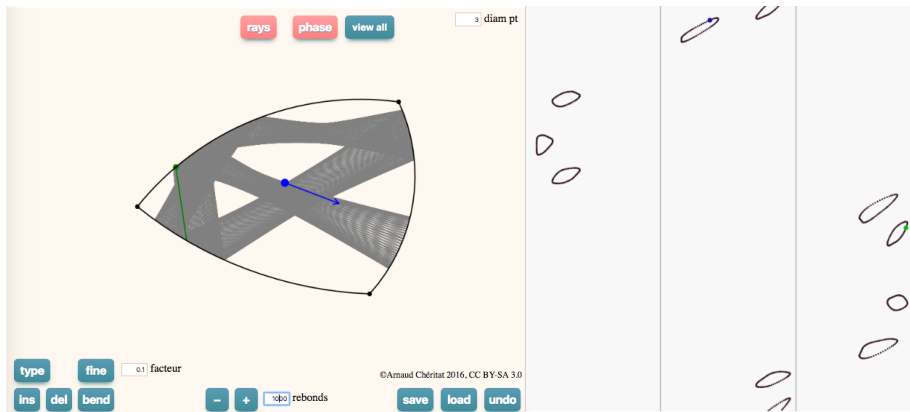
Continuous Edge Lock Object

Display Grid Lock Vertices Show Indicators

Snap to Grid Lock Edges Smooth Corner ...

Grid Size 50 Collisions 10

Un applet disponible en ligne mais nécessitant JAVA :
<http://classicalchaos.org/>



Un applet créé par Arnaud Chéritat :

<https://www.math.univ-toulouse.fr/~cheritat/NdC2016/applet-billards/>

Billard rectangulaire et billard avec obstacle

Billard standard et billard avec obstacle

Un billard en forme de stade

Un billard pentagonal

Trajectoires périodiques

Théorème (Birkhoff)

Dans un billard convexe à bord lisse, il existe des trajectoires périodiques de n'importe quelle période.

Trajectoires périodiques

Théorème (Birkhoff)

Dans un billard convexe à bord lisse, il existe des trajectoires périodiques de n'importe quelle période.

Question

Dans un billard polygonal, existe-t-il toujours une trajectoire périodique qui évite les coins ?

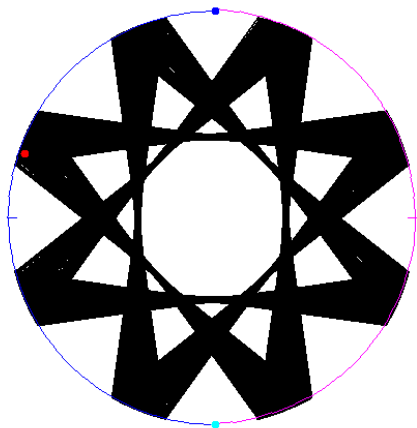
Question

Dans un billard rectangulaire, quelles sont les trajectoires périodiques ?

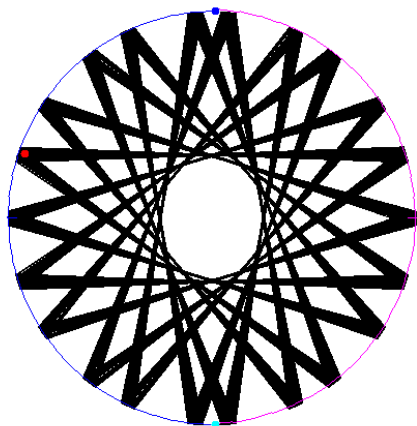
Question

Dans un billard triangulaire, quelles sont les trajectoires périodiques ?

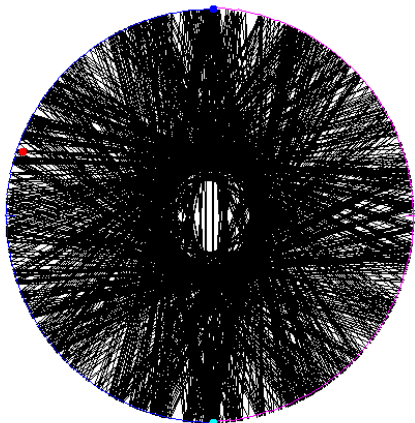
Stabilité versus chaos



Stabilité versus chaos



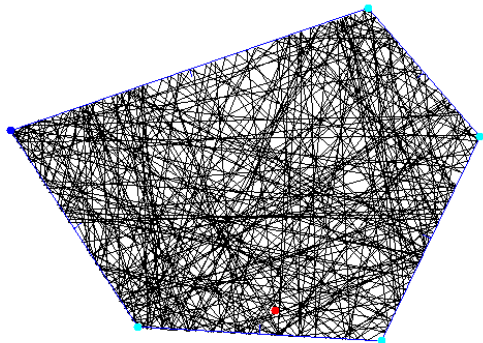
Stabilité versus chaos



Un billard lenticulaire

Question

Dans un billard polygonal, peut-on trouver des trajectoires denses ? Peut-on trouver des trajectoires ni périodique, ni dense ?



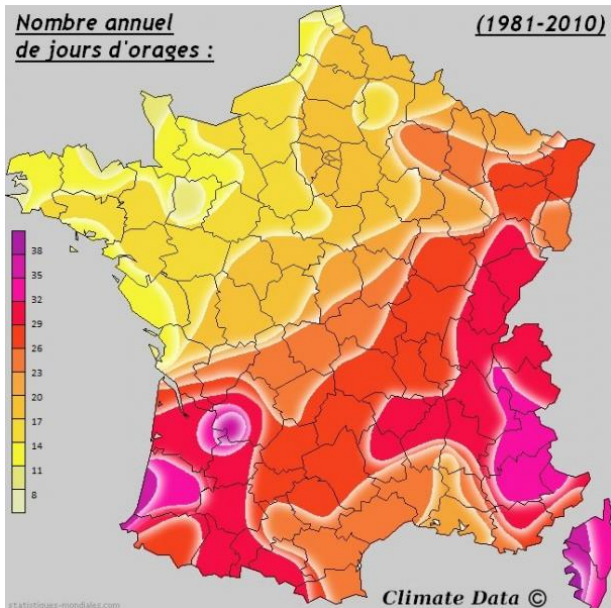
Est-il possible de prévoir quelque chose ?

- Dans sa conférence de 1972, Lorenz affirme :
« More generally, I am proposing that over the years minuscule disturbances neither increase nor decrease the frequency of occurrence of various weather events such as tornados; the most they may do is to modify the sequence in which these events occur »

Est-il possible de prévoir quelque chose ?

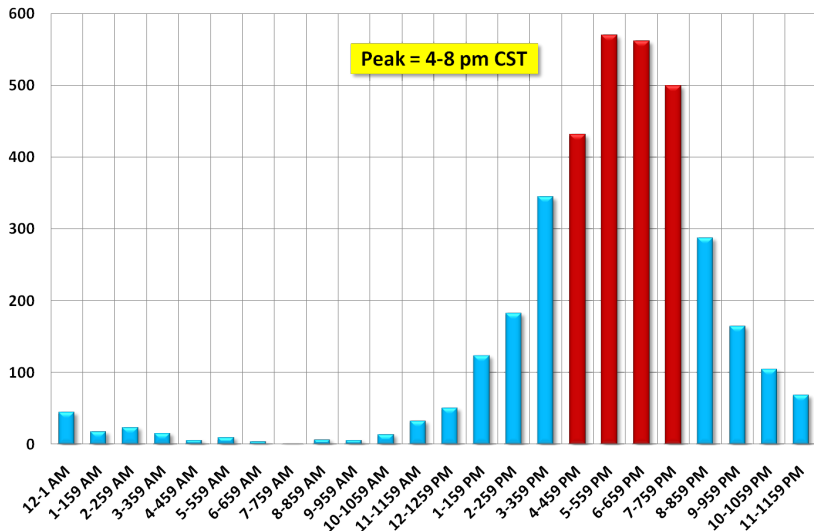
- Dans sa conférence de 1972, Lorenz affirme :
« More generally, I am proposing that over the years minuscule disturbances neither increase nor decrease the frequency of occurrence of various weather events such as tornados; the most they may do is to modify the sequence in which these events occur »
- Si on ne peut pas prévoir s'il pleuvra ou s'il y aura du soleil à Lyon le 22 août 2017, on peut néanmoins essayer d'estimer le nombre de jours de pluie et de beau temps en 2017.
- Il s'agit de se poser des questions d'un point de vue statistique.

Moyenne annuelle de jours d'orages par an



A quelle heure les tornades surviennent-elles ?

KS Hourly (CST) Tornado Frequency 1950-2009



Quels mois sont les plus touchés par des tornades ?

