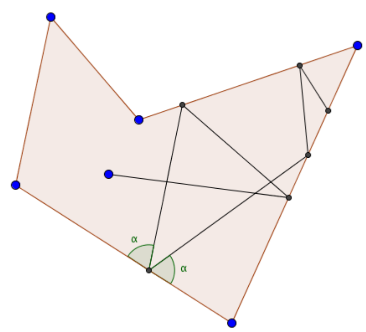
Mathinfoly – ateliers
Le mardi 23 août 2016

Table des matières + codes des ateliers

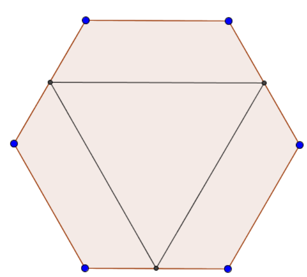
BILLARDS MATHÉMATIQUES

Un billard mathématique est constitué d'une table sur laquelle une bille se déplace en ligne droite à vitesse constante et rebondit sur les bords de la table selon les lois de l'optique géométrique : l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. L'objectif est d'étudier la nature des trajectoires dans un billard polygonal, c'est-à-dire pour lequel la table est un polygone.



1. Trajectoires périodiques

Une trajectoire est *périodique* si elle repasse par le point de départ dans la direction initiale. L'image suivante montre une trajectoire périodique dans un billard hexagonal. Cette trajectoire est un triangle.



On souhaite comprendre quelles sont les trajectoires périodiques dans les billards polygonaux. Voilà quelques pistes de réflexion, non exhaustives ! Attention, certaines questions peuvent avoir des réponses très simples, d'autres beaucoup moins. A vous de choisir celles qui vous interpellent le plus ou bien d'en inventer d'autres. . .

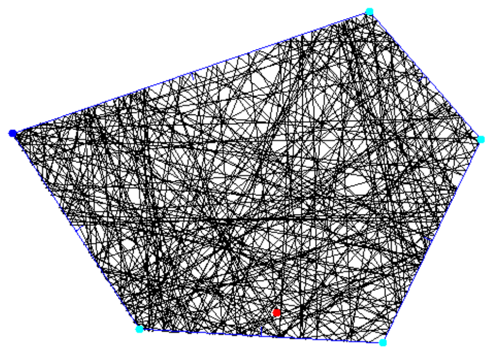
Question. Quelles sont les trajectoires périodiques dans un billard rectangulaire ?

Question. Existe-t-il des billards triangulaires qui contiennent des trajectoires périodiques ? Si oui, lesquels ?

Question. Existe-t-il un billard polygonal qui ne contient pas de trajectoire périodique ?

2. Nature des trajectoires

Une trajectoire est *dense* si elle passe arbitrairement près de n'importe quel point de la table.



Question. Un billard carré contient-il des trajectoires denses ?

Question. Existe-t-il un billard polygonal contenant une trajectoire qui passe par tous les points de la table ?

Question. Existe-t-il un billard polygonal ne contenant aucune trajectoire dense ?

Question. Existe-t-il des billards polygonaux contenant des trajectoires qui ne sont ni périodiques, ni denses ? Si oui, à quoi ressemblent de telles trajectoires ?

École Math-en-folie, Lyon, août 2016

Thème « Pavages, apériodicité et calculabilité »

Atelier 1 : Le problème du Domino

Atelier proposé par Nathalie Aubrun

On s'intéresse au problème connu sous le nom de "problème du Domino", qui tire son nom du célèbre jeu. **Étant donné un nombre fini de tuiles de Wang, peut-on trouver un pavage valide du quadrillage infini ?**

- *Tuile de Wang* : tuile carré portant une couleur sur chaque côté
- *Pavage valide* : deux tuiles de Wang ne peuvent être voisines que si leur côté commun porte la même couleur. De plus, on n'a pas le droit de faire tourner les tuiles.

Voici, pour vous donner des pistes et vous aider à attaquer le problème, une liste de questions auxquelles vous confronter. Celle-ci n'est pas exhaustive ! N'hésitez pas à solliciter vos encadrants, ou moi-même lorsque je passerai vous voir. Il est conseillé de s'attaquer à ces questions dans l'ordre proposé.

1. Pouvez-vous caractériser les jeux finis de dominos 1D qui permettent de paver la ligne infinie ?
2. Ce résultat est-il transposable dans le cas 2D ?
3. Si je vous donne une machine de Turing, pouvez-vous définir un jeu de tuiles qui encode ses calculs ?
4. Est-ce que la construction précédente permet de montrer l'indécidabilité du problème du Domino ? Pourquoi ?
5. Pour vous aider à aller plus loin, résolvez (*i.e.* construisez) le puzzle de Robinson. Peut-on paver la totalité du plan avec ce jeu de tuiles ?
6. Le problème du Domino est-il alors décidable ?

Matériel à votre disposition :

- tableau magnétique
- ordinateur avec accès internet, et casque/écouteurs
- puzzle de Robinson, version magnétique en bois
- domino à deux, trois, quatre, cinq, six couleurs, version papier
- tuiles de Wang à deux et trois couleurs, version papier
- scotchs de différentes couleurs
- crayons ou feutres de couleurs
- de quoi faire des photos

École Math-en-folie, Lyon, août 2016

Thème « Pavages, apériodicité et calculabilité »

Atelier 2 : (A)Périodicité

Atelier proposé par Nathalie Aubrun

On s'intéresse au problème suivant : **Existe-t-il un jeu fini de tuiles de Wang qui possède la propriété d'être apériodique (il est possible de paver le quadrillage infini avec, mais aucun des pavages valide n'est laissé invariant par translation) ?**

- *Tuile de Wang* : tuile carré portant une couleur sur chaque côté
- *Pavage valide* : deux tuiles de Wang ne peuvent être voisines que si leur côté commun porte la même couleur. De plus, on n'a pas le droit de faire tourner les tuiles.

Voici, pour vous donner des pistes et vous aider à attaquer le problème, une liste de questions auxquelles vous confronter. Celle-ci n'est pas exhaustive ! N'hésitez pas à solliciter vos encadrants, ou moi-même lorsque je passerai vous voir. Il est conseillé de s'attaquer à ces questions dans l'ordre proposé.

1. Que se passe-t-il dans le cas des pavages de la ligne infinie par des dominos ?
2. Étant donné un jeu de tuiles de Wang, que peut-on dire de l'ensemble des périodes (tailles des motifs périodiques) qu'il peut réaliser ?
3. Résolvez le puzzle de Robinson. Peut-on paver la totalité du plan avec ce jeu de tuiles ? Le pavage est-il apériodique ? Pourquoi ?
4. Mêmes questions avec le pavage de Penrose.

Matériel :

- tableau magnétique
- ordinateur avec accès internet, et casque/écouteurs
- puzzle de Robinson, version magnétique en bois
- puzzle de Penrose (version magnétique en bois ou version papier)
- domino à deux, trois, quatre, cinq, six couleurs, version papier
- tuiles de Wang à deux et trois couleurs, version papier
- scotchs de différentes couleurs
- crayons ou feutres de couleurs
- de quoi faire des photos

Comprendre l'évolution de la diversité génétique au sein d'une population

Document élèves

Le but de cet atelier est de décrire de manière mathématique l'évolution de la proportion des différents « allèles » d'un gène (c'est-à-dire, des différentes versions d'un gène donné) d'une génération à l'autre et d'en déduire des informations sur le devenir de la diversité génétique de la population. Dans la suite, on supposera que

- la taille de la population reste constante d'une génération à l'autre. On notera cette taille N (par exemple, $N = 1000$ individus) ;
- le gène considéré a seulement deux allèles A et a. On pourra par exemple penser au gène de la couleur des yeux, avec comme allèles celui des yeux bleus et celui des yeux bruns (même si la réalité est plus complexe et que par ailleurs il y a des gènes beaucoup plus importants que celui de la couleur des yeux !).

Ces hypothèses impliquent qu'on peut se limiter à regarder le nombre X_n d'individus portant l'allèle A à la génération n, puisque le nombre de porteurs de l'allèle a est $N - A_n$. En fait on s'intéressera plutôt à la proportion p_n des individus d'allèle A, c'est-à-dire à

$$p_n = \frac{X_n}{N}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

On veut comprendre comment cette proportion fluctue au cours du temps.

1 Un premier modèle

Pour commencer, supposons que chaque individu d'une génération donnée produit un très grand nombre de gamètes (portant le même allèle que leur parent) parmi lesquels seront « piochés » les N gamètes qui donneront naissance aux individus de la génération suivante. Pour donner un avantage aux individus d'allèle A (les yeux bleus ?), on suppose que ceux-ci produisent deux fois plus de gamètes que les individus d'allèle a. Comme la génération suivante est formée d'individus choisis au hasard parmi ces enfants potentiels, si par exemple on a autant d'individus d'allèle A que d'individus d'allèle a à la génération 0, alors un individu de la génération 1 aura plus de chance d'avoir un parent A qu'un parent a et donc on aura plus de A que de a parmi les N individus de la génération 1. On appelle ce biais de la *sélection par fertilité* et nous allons essayer de quantifier son effet sur l'évolution de la population.

Plus précisément, la dynamique correspondant à ce modèle est

$$p_{n+1} = \frac{2p_n}{2p_n + 1 - p_n} = \frac{2p_n}{1 - p_n}.$$

Pourquoi ?

Simulations

On pourra commencer par simuler la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ pour se faire une idée de ce qu'il se passe, puis généraliser cette approche en supposant que les individus portant l'allèle A produisent $(1+s)$ fois plus de gamètes que les individus porteurs de l'allèle a (si $s \in [-1, 0[$, les A produisent en fait moins de gamètes que les a).

Qu'observe-t-on sur le long terme ? Si $s = 0$? Si s est très proche de -1 ? Si s est très grand ?

Analyse

Pour commencer, quels sont les équilibres possibles pour cette évolution ? Et dans le cas plus général où les individus A produisent $(1+s)$ fois plus de gamètes que les individus a ? Que se passe-t-il sur le long terme ?

Modèle avec mutations

Pour le moment on a supposé que les gamètes (et donc les enfants) portaient le même allèle que leurs parents. Mais il peut arriver que des mutations apparaissent et modifient l'allèle porté par un gamète. Pour simplifier le problème, on supposera que les A mutés deviennent des a et réciproquement (on pourrait imaginer que les mutations créent de nouveaux allèles).

Supposons pour commencer que $s = 0$, qu'un tiers des gamètes issus de parents A portent l'allèle a et que $1/5$ des gamètes issus de parents a portent l'allèle A. Quelle est la relation qui lie p_{n+1} à p_n ? Comment évolue la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ au cours du temps ? Sur le long terme ?

Plus généralement, on peut noter m_{Aa} la fraction des gamètes issus de parents A qui mutent et portent l'allèle a et m_{aA} la fraction des gamètes mutants de parent a. Comment évolue la diversité génétique de la population en fonction de ces paramètres ? L'un des allèles peut-il envahir la population ?

Pour finir, on pourra incorporer au modèle à la fois de la sélection naturelle et des mutations et répondre aux mêmes questions.

2 Quelques notions de probabilités

Avant d'essayer d'améliorer l'approche précédente, faisons une incursion dans le monde des objets aléatoires. Le résultat dont nous aurons le plus besoin dans la suite est le suivant : si on fait N essais et qu'à chaque fois on a 1 chance sur 3 (ou une probabilité $1/3$) que l'essai soit un succès, le nombre moyen de réussites est $N/3$.

- Que veut dire « avec probabilité $1/3$ » ?
- Que veut dire « le nombre moyen » ?
- Comment mesure-t-on la *variabilité* d'une quantité aléatoire ?
- *Suite d'expériences succès/échec.* Supposons qu'on effectue N fois (indépendamment) une expérience qui est un succès avec probabilité $1/3$ ou un échec avec probabilité $2/3$. Appelons X le nombre de succès, qui peut donc prendre les valeurs 0, 1, ... , N. Par exemple, si $N = 3$ quelle est la probabilité que $X = 0$? $X = 1$? $X = 2$? $X = 3$? Et si on fait N essais avec une probabilité de succès $p \in [0, 1]$?
- Petite remarque : si X est une variable aléatoire de moyenne m et de variance v et que N est un nombre (pas aléatoire), quelles sont la moyenne et la variance de X/N ?

3 Le modèle de Wright-Fisher « neutre »

Lorsqu'aucun allèle n'a d'avantage reproductif sur l'autre, on dit que l'évolution est *neutre*. Nous allons commencer par étudier ce cas. Prenons une population de taille constante égale à 6 (pour rentabiliser l'achat des dés). Comme précédemment chaque individu peut porter l'allèle A ou l'allèle a. Le mécanisme pour passer de la génération n à la génération $n+1$ est le suivant : chaque individu de la génération $n+1$ choisit un parent « uniformément au hasard » parmi les individus de la génération n et hérite de son allèle. Uniformément au hasard signifie que chacun des 6 individus de la génération n a la même probabilité $1/6$ d'être choisi comme parent. On suppose en outre que ces choix se font indépendamment les uns des autres.

Simulations

On pourra commencer par simuler cette évolution à la main, avec un dé pour déterminer le choix des parents. Comment peut-on le simuler avec un ordinateur ? Comment peut-on encoder la population à chaque génération et que doit-on garder en mémoire au cours du temps ?

Analyse

Si on note à nouveau X_n le nombre de A dans la population (de taille $N = 6$ pour commencer) à la génération n, quelles sont les valeurs possibles pour X_1 ? Si on part d'un nombre X_0 d'individus A au début, quelle est la probabilité qu'à la génération 1 on aie $X_1 = k$? Quels sont les comportements en temps long possibles ? Que se passe-t-il lorsque N devient très grand ?

4 Le modèle de Wright-Fisher avec sélection naturelle

Cette fois, comme dans la première section on donne un poids $1 + s$ à chaque individu porteur de l'allèle A et un poids 1 aux porteurs de l'allèle a dans le choix du parent d'un nouvel individu. Autrement dit, la probabilité de choisir un parent d'allèle A lorsque la proportion de A à la génération parentale est p vaut $(1 + s)p/(1 + sp)$. Sous ces nouvelles hypothèses, quelle est la probabilité que X_1 vaille $k \in \{0, \ldots, N\}$?

Simulations

A partir de ce résultat, on pourra simuler cette évolution, en particulier dans les cas $s = 0$, s proche de -1 et s très grand. On pourra aussi relire l'étude de la section 1 à la lumière de ce nouveau modèle. Quels sont les équilibres possibles ? Comment la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ se comporte-t-elle sur le long terme ?

Analyse

Il est plus difficile d'obtenir des résultats sur le cas avec sélection naturelle pour des raisons mathématiques qu'on ne détaillera pas. En revanche, on pourra reprendre la question de ce qu'il se passe lorsque la taille de la population N devient très grande.

Ouverture

Si le temps le permet, on pourra rajouter des mutations en supposant qu'un individu choisissant un parent d'allèle A a une probabilité m_{Aa} de muter et de finalement porter l'allèle a, tandis qu'un individu choisissant un parent d'allèle a a une probabilité m_{aA} de porter l'allèle A après mutation.

5 Un modèle simplifié : la marche aléatoire biaisée

Comme le modèle de Wright-Fisher est difficile à étudier, considérons un modèle un peu plus simple. On part de $X_0 = x$ et à chaque pas de temps, la valeur de X diminue de 1 avec probabilité 1/4, augmente de 1 avec probabilité 1/2 et reste identique avec probabilité 1/4. L'évolution s'arrête lorsque X_n atteint 0 ou N. Quel est le rapport avec la question qui nous occupe ?

Simulations

On pourra simuler cette évolution pour en comprendre le comportement en temps long, puis généraliser l'algorithme au cas où la probabilité d'augmenter est π_+, celle de diminuer π_- et celle de rester identique est $1 - \pi_+ - \pi_-$.

Analyse

Etudions la probabilité que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ atteigne N avant 0. On notera q_i cette probabilité sachant que $X_0 = i$. On commencera par justifier que $q_0 = 0$, $q_N = 1$ et que si $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, alors

$$q_i = \pi_+ q_{i+1} + \pi_- q_{i-1} + (1 - \pi_+ - \pi_-) q_i \qquad \Leftrightarrow \qquad (\pi_+ + \pi_-) q_i = \pi_+ q_{i+1} + \pi_- q_{i-1}.$$

Comment peut-on résoudre ce système d'équations ? Quel système d'équations analogue satisfait le temps moyen t_i pour atteindre l'état 0 ou N en partant de $X_0 = i$? Pour cette dernière question, on se contentera de résoudre le système dans le cas « neutre » $\pi_+ = \pi_-$, qui est déjà bien assez compliqué comme ça. On pourra également comparer ces résultats aux simulations.

Ouverture

On pourra ensuite ajouter des mutations en supposant que la suite ne s'arrête plus lorsqu'elle atteint 0 ou N, mais repart dans l'autre sens avec une certaine probabilité m_{aA} (transition $N \to N-1$) ou m_{Aa} (transition $0 \to 1$). Que peut-on dire de cette évolution ?

Modéliser l'évolution de la taille d'une population

Document élèves

Le but de cet atelier est d'explorer différentes manières de mettre en équation et d'étudier la dynamique de la taille d'une population (humaine, d'animaux, de plantes, de virus, ...) au cours du temps. L'application qui sera le fil conducteur ici est l'évolution d'une épidémie.

1 Croissance malthusienne

Le premier modèle a été proposé par Robert Malthus en 1798 pour comprendre l'évolution de la taille d'une population humaine, d'où l'appellation « modèle de Malthus ».

Commençons par regarder plusieurs exemples. A chaque fois, on notera a_n la taille de la population à la génération n.

1. On suppose que chaque individu a 2 enfants à la génération d'après (on ne compte pas l'individu lui-même dans la nouvelle génération).
2. On suppose qu'un tiers des individus a 3 enfants, un autre tiers a 2 enfants et le dernier tiers n'a qu'un enfant.
3. On suppose qu'un tiers des individus a 2 enfants, un autre tiers a 1 enfant et le dernier tiers a 0 enfant.
4. On suppose qu'un quart des individus a 2 enfants, un autre quart a 1 enfant et la moitié restant a 0 enfant.

Quelle est l'équation qui relie a_n à a_{n-1} ? Peut-on la résoudre ? Comment peut-on simuler une telle évolution ? Quel sera le devenir de la taille de la population sur le long terme ?

Une fois tous ces points compris, on pourra réfléchir à comment sortir de ces cas particuliers un résultat plus général.

Application : comprendre la dynamique d'une épidémie

On suppose que la population qu'on regarde est aussi grande qu'on veut (pour qu'on ne manque jamais de nouvelles personnes à contaminer). Un seul individu est infecté par une maladie contagieuse au premier jour considéré. Puis chaque jour, chaque individu infecté contamine en moyenne 1,5 personnes saines et a une chance sur 10 de guérir à la fin de la journée (il ne sera donc plus infectieux à partir du lendemain).

Question : L'épidémie va-t-elle décoller ou pas ? Et si on remplace 1,5 par $b \geq 0$ et 1/10 par $d \in [0, 1]$?

2 Croissance « malthusienne aléatoire »

En réalité on ne peut pas vraiment contaminer 1,5 individus, mais plutôt un nombre aléatoire d'individus de moyenne $1,5$. Lorsque l'épidémie est déjà bien établie et touche un grand nombre de gens, on peut se contenter de regarder le comportement moyen de la population car les comportements individuels se compensent pour donner une évolution globale moyenne. Mais lorsque l'épidémie démarre avec un seul individu et que la probabilité que celui-ci ne contamine personne est de $1/3$, il est important de savoir si cet évènement se réalise et la maladie disparaît complètement, ou s'il contamine quelqu'un d'autre et l'épidémie a une chance de décoller. On part donc des mêmes hypothèses qu'avant en ce qui concerne la population, mais à présent on suppose que chaque jour, chaque individu infecté a une probabilité $2/3$ de contaminer quelqu'un d'autre et une probabilité $1/3$ de guérir sans contaminer personne ce jour-là (ni les jours suivants par conséquent). Ces infections ou guérisons se font indépendamment les unes des autres.

Pour comprendre cette évolution, on commencera par la simuler. On pourra remplacer $2/3$ par un paramètre $p \in [0,1]$ pour voir l'effet de cette probabilité sur l'évolution à long terme de la population d'infectés. On essaiera en particulier $p = 1$, $p = 0,75$, $p = 0,5$, $p = 0,25$ et $p = 0$.

Etudions maintenant le comportement de ce système. Pour commencer, si on l'analysait comme dans la section précédente, quelle suite $(a_n)_{n \geq 0}$ obtiendrait-on ? Ensuite, appelons x la probabilité que la population/l'épidémie s'éteigne lorsqu'elle part d'un seul individu. On commencera par justifier que cette probabilité satisfait l'équation suivante :

$$x = (2/3)\, x^2 + (1/3) \times 1. \tag{1}$$

On pourra ensuite la résoudre et en déduire des propriétés du modèle, puis généraliser cette étude au cas où $2/3$ est remplacé par $p \in [0,1]$. Pour finir, quelle est la vitesse de croissance de la population quand elle croît ? Le temps qu'elle met à s'éteindre lorsque c'est le cas ?

3 Des modèles aléatoires plus généraux

Pour explorer des modèles plus généraux sans trop compliquer le propos, on suppose que chaque jour, chaque individu infecté contamine 2 individus sains avec probabilité $1/4$, 1 individu sain avec probabilité $1/4$, 0 individus mais ne guérit pas non plus avec probabilité $1/4$ ou enfin guérit sans contaminer personne avec probabilité $1/4$. Analyser cette dynamique.

En ouverture, on pourra réfléchir à nouveau aux différentes politiques de contrôle de l'épidémie et leur modélisation dans ce cadre aléatoire.

4 Le modèle logistique

Les modèles précédents sont un peu simplistes car si les ressources (le nombre de malades potentiels par exemples) sont limitées, alors les individus finiront par se gêner les uns les autres et à entrer en compétition pour les ressources. Comment peut-on prendre ceci en compte ?

On peut par exemple considérer que la compétition est proportionnelle à la taille actuelle de la population, mais qu'elle est d'autant moins grande qu'il y a beaucoup de ressources. Dans un modèle sans aléa, ceci donne le modèle logistique :

$$a_n = r a_{n-1}\left(1 - \frac{1}{K}\, a_{n-1}\right).$$

A quoi correspondent biologiquement les différents termes de cette équation ? Simuler cette dynamique en fonction de $r > 0$, $K > 0$ et de la valeur initiale $a_0 > 0$.

Comment peut-on analyser ce système ? Quels sont les « équilibres » possibles pour la taille de la population ? S'en rapproche-t-on au cours du temps ? Y a-t-il d'autres comportements possibles sur le long terme ?

5 Le modèle de Lotka-Volterra

En réalité les populations évoluent rarement seules, elles font partie d'un écosystème qui induit des interactions entre elles. Pour comprendre les effets de ces interactions, on peut commencer par s'intéresser à deux populations, une de proies et l'autre de prédateurs.

Le modèle le plus connu est le modèle de Lotka-Volterra, qui a été proposé indépendamment par Alfred Lotka et Vito Volterra en 1925-1926 pour expliquer une dynamique telle que celle de la figure 1. Celle-ci décrit la quantité de lièvres et de lynx dans une province du Canada

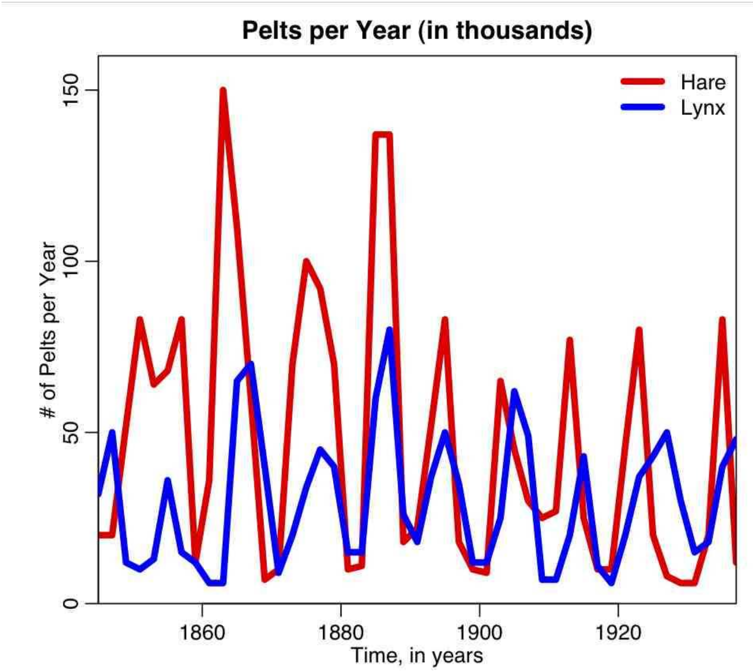


FIG. 1: Estimation des tailles de populations de lièvres et de lynx dans une province du Canada, sur un siècle.

entre 1840 et 1940 (ces chiffres ont en fait été estimés à partir du nombre de peaux de lièvres et de lynx vendues chaque année sur les marchés). Le modèle de Lotka-Volterra se décrit de la manière suivante : si on note a_n le nombre de proies et b_n le nombre de prédateurs à la génération n, alors

$$a_n = ra_{n-1} - \gamma a_{n-1}b_{n-1},$$
$$b_n = \delta a_{n-1}b_{n-1} - db_{n-1}.$$

On commencera par interpréter biologiquement les différents termes de ces équations, puis on étudiera ce système en utilisant et adaptant les techniques vues précédemment.

Sujet 1 : Détection d'incendie dans un bâtiment

Le directeur d'un musée veut protéger son musée des incendies. Pour cela il veut placer des détecteurs dans son musée. Un détecteur s'allume s'il y a un feu dans la pièce où il se situe ou dans une des pièces voisines. Il faut placer les détecteurs de sorte de pouvoir localiser précisément le lieu du feu lorsqu'il y en a un. Ainsi, il faut que :

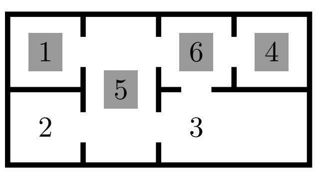
1. chaque pièce contienne un détecteur ou bien soit à côté d'une pièce contenant un détecteur (pour que chaque feu soit détecter) ;
2. pour chaque pièce, l'ensemble des détecteurs qui vont s'allumer en présence d'un feu soit unique (pour pouvoir localiser le feu).

Ces détecteurs coûtent très cher ! Comment les placer pour en utiliser un nombre minimum ?

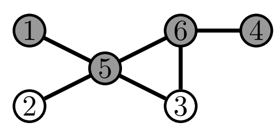
Modélisation : Ce problème peut se modéliser avec un graphe. Les sommets sont les pièces, les arêtes sont entre deux pièces voisines. On cherche donc un ensemble de sommets S (les détecteurs) tel que :

1. S soit un ensemble dominant : tout sommet du graphe hors de S à un voisin dans S ;
2. pour chaque sommet x de G, on liste les voisins de x dans S, cette liste est non vide et unique.

Exemple : Dans le musée ci-dessous, il y a 6 salles. Un détecteur dans la salle 5 pourra détecter un feu dans les salles 1,2,3,5 et 6 mais pas dans la salle 4. En plaçant les détecteurs dans les salles 1,4,5,6 cela fonctionne. Par exemple si les détecteurs 5 et 6 s'allument, le feu est obligatoirement dans la salle 3.



Le musée



Représentation avec un graphe

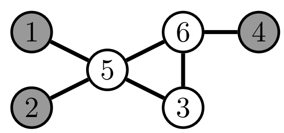
Questions Voilà quelques pistes de réfléxion, non exhaustives ! Attention, certaines questions peuvent avoir des réponses très simples, d'autres beaucoup moins. A vous de choisir celles qui vous interpellent le plus ou bien d'en inventer d'autres...

- Est-il toujours possible de trouver un tel ensemble ?
- Pour des graphes simples (chemins, grilles, ...), quels sont les plus petits ensemble ?
- Comment savoir si l'ensemble est optimal ?
- Pour un graphe avec un nombre fixé de sommets, quelle est la taille minimale d'un tel ensemble ?
- Quels sont les plus mauvais graphes pour ce problème ? Les meilleurs ? Si on veut que cela représente effectivement un musée ?
- ...

Sujet 2 : Localisation d'un robot dans un graphe

Un robot se déplace dans un graphe. Pour qu'il puisse se repérer, on place des bornes sur les sommets du graphe. Lorsque le robot est sur un sommet, il connait les distances à chacune des bornes. On veut placer les bornes de sorte que cette information – les distances à chaque borne – lui permette de retrouver le sommet sur lequel il est situé. Comment faire pour placer les bornes ? Quel nombre minimal de bornes faut-il ?

Exemple : Dans le graphe ci-dessous, on peut s'en sortir avec trois bornes placées sur les sommets 1,2,4. Si le robot est sur le sommet 3, il est à distance 2 de chaque borne, et c'est le seul sommet dans ce cas. On peut ainsi vérifier que chaque sommet a des distances uniques aux bornes. En enlevant la borne sur le sommet 2, cela ne fonctionne plus car le sommet 2 et le sommet 3 sont tous les deux à distance 2 des bornes 1 et 4 et le robot ne peut pas savoir s'il est sur le sommet 2 ou 3. Mais peut-être qu'en plaçant deux bornes autrement cela est possible ?

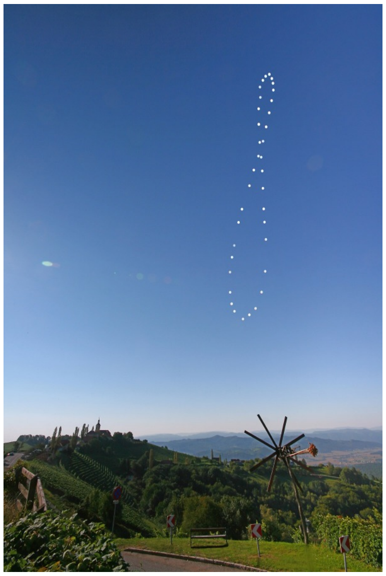


Questions Voilà quelques pistes de réfléxion, non exhaustives ! Attention, certaines questions peuvent avoir des réponses très simples, d'autres beaucoup moins... A vous de choisir celles qui vous interpellent le plus ou bien d'en inventer d'autres...

- Est-il toujours possible de placer les bornes ?
- Pour des graphes simples (chemins, grilles, ...), où mettre les bornes ?
- Avec une borne, quels graphes peut-on avoir ? Avec deux ?
- Quels sont les plus mauvais graphes pour ce problème ? Les meilleurs ?
- Comment savoir si le nombre de bornes est optimal ?
- Mêmes questions si les bornes ont un rayon d'action limité (on ne les voit que sous une certaine distance, sinon il n'y a pas de signal).

Atelier : À quelle heure est-il midi ?

Midi, comme la plupart des notions temporelles, est défini par rapport au mouvement du soleil dans le ciel : il est midi quand le soleil est au sud. Pourtant, quand il est midi à ma montre, le soleil est parfois légèrement décalé vers l'est, parfois légèrement décalé vers l'ouest, et le soleil de midi décrit au cours de l'année une belle et étrange courbe en forme de huit.



Midi à ma montre et midi solaire ne coïncident pas, la durée du jour n'est pas constante !

L'objectif de l'atelier est d'expliquer ce décalage, et peut-être même de le quantifier. Je n'en dis pas plus, vous avez toutes les clefs en main pour émettre vos hypothèses, les refuter ou les démontrer !

Description de l'atelier à destination des stagiaires

Avec du matériel d'école primaire, ficelle, crayons de couleur, papier, ciseaux etc. on cheminera entre la magie des tours automatiques (ce qui ne veut pas dire qu'ils soient faciles à réaliser !) et les surprises qu'amènent les tentatives de les comprendre.
On s'intéressera aux formes, ou plutôt aux transformations, aux déformations ... et même aux informations nécessaires pour les transmettre !
Une participation active, y compris corporelle, sera demandée lors de l'atelier : il faudra réaliser des tours de magie ! La restitution de l'atelier pourra prendre la forme d'un spectacle.